Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

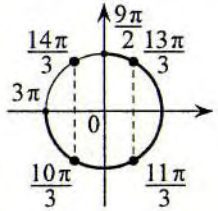
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0{,}25;\ \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\cos x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

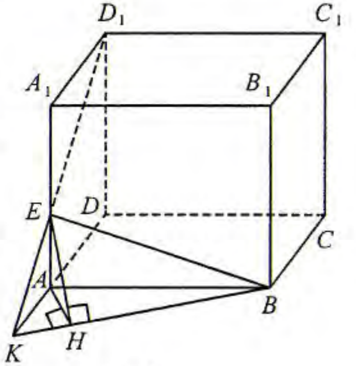
Решение.

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 3 : 2$, получаем:

$$AE = \frac{3AA_1}{5} = 3;\ EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$



Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE получаем:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 3.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 2$; $AK = 3$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{13}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg}\angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\left(\sin\angle AHE = \frac{\sqrt{221}}{17};\ \cos\angle AHE = \frac{2\sqrt{17}}{17}.\right)$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{160 - 4^x}{32 - 2^x} \ge 5, \\ \log_{0{,}25x^2}\left(\dfrac{6 - x}{4}\right) \le 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x$.

$$\frac{160 - y^2}{32 - y} \ge 5;\ \frac{y^2 - 5y}{y - 32} \ge 0;\ \frac{y(y-5)}{y-32} \ge 0;\ \left[\begin{array}{l} 0 \le y \le 5 \\ y > 32. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 0 \le 2^x \le 5 \\ 2^x > 32, \end{array}\right.$ откуда находим решение первого неравенства системы: $x \le \log_2 5$; $x > 5$.

$0 \le 2^x \le$

$\left[\begin{array}{l} x \le \log \\ x > 5 \end{array}\right.$

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0{,}25x^2 > 1$.

$$\log_{0{,}25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) \le 1;\ 0 < \frac{6-x}{4} \le 0{,}25x^2;\ \begin{cases} x^2 + x - 6 \ge 0, \\ 6 - x > 0; \end{cases} \begin{cases} (x+3)(x-2) \ge 0, \\ x < 6, \end{cases}$$

откуда находим: $x \le -3;\ 2 \le x < 6$. Учитывая условие $0{,}25x^2 > 1$, получаем: $x \le -3;\ 2 < x < 6$.

Второй случай: $0 < 0{,}25x^2 < 1$.

$$\log_{0{,}25x^2}\left(\frac{6-x}{4}\right) \le 1;\ \frac{6-x}{4} \ge 0{,}25x^2;\ (x+3)(x-2) \le 0;\ -3 \le x \le 2.$$

Учитывая условие $0 < 0{,}25x^2 < 1$, получаем: $-2 < x < 0;\ 0 < x < 2$.

Решение второго неравенства исходной системы:

$$x \le -3;\ -2 < x < 0;\ 0 < x < 2;\ 2 < x < 6.$$

3. Поскольку $2 < \log_2 5 < 3$, получаем решение исходной системы неравенств:

$$x \le -3;\ -2 < x < 0;\ 0 < x < 2;\ 2 < x \le \log_2 5;\ 5 < x < 6.$$

Ответ: $(-\infty; -3];\ (-2; 0);\ (0; 2);\ (2; \log_2 5];\ (5; 6)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK.$$

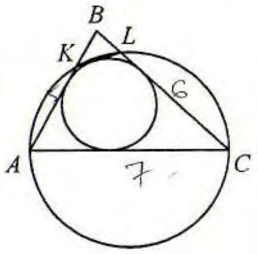


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$. Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k);\ k = \frac{AB + BC - AC}{AC + AB + BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{5+6-7}{5+6+7} = \frac{2}{9}$. Следовательно, $KL = \frac{2}{9}AC = \frac{14}{9}$.

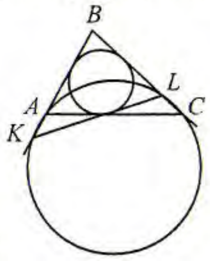


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 7$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{14}{9}$; 7.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - 2$ и $g(x) = \left|\frac{5}{x} - 3\right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a \le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0;\frac{5}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{5}{3}\right) \ge g\left(\frac{5}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a \ge \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-2=3-\frac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-5x+5=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{5+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5}{2a}>2>\frac{5}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(x_2-\frac{5}{3}\right)=a\left(\frac{5}{3}\right)^2-5\cdot\frac{5}{3}+5=\frac{25a-30}{9}>0, \text{ то есть } a>\frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0;+\infty)$:

- нет корней при $a\le 0$;
- один корень при $0<a<\frac{6}{5}$ и $a>\frac{5}{4}$;
- два корня при $a=\frac{6}{5}$ и $a=\frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{2}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Решение.

а) Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 7 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетило не более 2 мальчиков, поскольку если бы их было 3 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{3}{3+10}=\frac{3}{13}$, что больше $\frac{2}{11}$. Аналогично, кино посетило не более 7 мальчиков, поскольку $\frac{8}{8+10}=\frac{8}{18}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{2}{11}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \le \frac{2}{9}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{8}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{8}{9}+1} = \frac{9}{17}.$$

Если группа состоит из 2 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{17}$.

Ответ: а) да; б) 9; в) $\frac{9}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4